Автоматика и телемеханика, № 9, 2024

Нелинейные системы

© 2024 г. **С.В. АКМАНОВА, канд. пед. наук (svet.akm_74@mail.ru)**
(Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова)

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Рассматриваются нелинейные непрерывно-дискретные (гибридные) системы, содержащие подсистему дифференциальных уравнений и подсистему разностных уравнений, в состав которых входит управление (скалярное или векторное). Представлен переход от нелинейной гибридной системы с постоянным шагом $h > 0$ дискретизации к равносильной (в естественном смысле) нелинейной дискретной динамической системе. Установлены достаточные условия приведения систем первого приближения нелинейных дискретных систем к канонической форме Бруновского и достаточные условия стабилизации таких систем, достаточные условия стабилизации нелинейных гибридных систем с различным по размерности управлением. Разработаны алгоритмы построения стабилизирующих управлений для нелинейных гибридных систем. Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность полученных результатов в решении задачи стабилизации нелинейных гибридных динамических систем.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, дискретная система, гибридная система, управляемая система, точка равновесия, стабилизируемая система, каноническая форма Бруновского.

DOI: 10.31857/S0005231024090023, **EDN:** ZQWTTU

1. Введение

Задача стабилизации динамических систем является одной из важнейших в теории управления, что обусловлено запросами практики управления, а также открытыми (нерешенными) научными проблемами в этой области [1–4]. Решение данной задачи позволит обеспечить устойчивые режимы функционирования динамических систем и поможет решить поставленные задачи управления данными системами.

Гибридные динамические системы служат математическими моделями реальных механических, технических, технологических и других процессов, природа которых неоднородна и которые не могут быть описаны только дифференциальными уравнениями. Например, моделирование управления летательными аппаратами, электропоездами может быть реализовано лишь с помощью дискретного регулятора силы тяги [5, 6]. Поэтому главной особенностью таких гибридных (непрерывно-дискретных) динамических систем управления служит их адекватность моделируемым объектам [7], процессы функционирования которых носят, как правило, нелинейный характер, а значит соответствующие им гибридные динамические системы являются нелинейными непрерывно-дискретными системами.

Среди гибридных систем имеется большой класс систем, стабилизируемых соответствующими переключениями в определенные моменты времени [8]. Однако вопросы стабилизации реальных динамических систем управления неразрывно связаны с вопросами управляемости указанных систем.

Методы стабилизации управляемых динамических систем создавались и развивались более 150 лет [4]. Накоплен большой опыт по стабилизации непрерывных, дискретных систем (см., например, [9–16]), имеются наработки в области стабилизации линейных гибридных систем (см., например, [3, 7, 17]), а также нелинейных гибридных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с различными нелинейностями и управлением в виде дискретного регулятора обратной связи по состоянию или выходу [18–22]. Однако вопросы стабилизации нелинейных гибридных систем, процессы в которых описываются дифференциальными и разностными уравнениями, а состояния содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты, недостаточно изучены.

В настоящей статье изложен общий подход к стабилизации таких нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) систем со скалярным или многомерным (векторным) управлением, имеющих постоянный шаг дискретизации. Этот подход основан на переходе от данной нелинейной гибридной системы к равносильной, в естественном смысле, нелинейной дискретной динамической системе.

Новизна данного исследования состоит в следующем:

1) введено понятие канонической формы Бруновского для системы первого приближения нелинейной дискретной динамической системы со скалярным управлением;

2) установлены достаточные условия приведения системы первого приближения равносильной нелинейной дискретной системы со скалярным (векторным) управлением к канонической форме Бруновского (к совокупности независимых подсистем, каждая из которых имеет каноническую форму Бруновского);

3) установлены и продемонстрированы на примерах алгоритмы приведения систем первого приближения равносильных нелинейных дискретных систем (как со скалярным, так и с векторным управлением) к канонической форме Бруновского;

4) установлены достаточные условия стабилизации систем первого приближения равносильных нелинейных дискретных динамических систем управления (как со скалярным, так и с векторным управлением);

5) установлены достаточные условия стабилизации нелинейных гибридных динамических систем управления с различным по размерности управлением;

6) установлены и продемонстрированы на примерах алгоритмы построения стабилизирующих управлений для нелинейных гибридных систем с различным по размерности управлением.

2. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система управления вида

$$(1)\qquad \begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

с начальными условиями

$$(2)\qquad x(t_0) = x_0, \ \ y(t_0) = y_0,$$

где $x \in R^n$, $y \in R^m$ – векторы состояний системы (1), характеризующие поведение соответственно непрерывной и дискретной частей данной системы; $u \in R^q$ – управление системы (1); моменты времени t_k задают на R равномерную сетку с постоянным шагом $h > 0$, т.е. $t_{k+1} - t_k = h > 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $t_k = kh$; функции $f(x, y)$ и $g(x, y, u)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных.

Пусть при выключенном управлении, т.е. при $u = 0$, выполняются соотношения

$$(3)\qquad f(0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0) = 0,$$

т.е. при $u = 0$ система (1) имеет нулевую точку равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Функционирование системы (1) при выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, с учетом (2), осуществляется по стандартной схеме:

1) задаются начальные условия $z_0 = (x_0, y_0)$;
2) находится решение $x = \varphi_0(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_0)$, $x(t_0) = x_0$, по которому строятся векторы $x_1 = \varphi_0(t_1)$, $y_1 = g(x_1, y_0, u_0)$, где $u_0 = u(t_0)$;
3) находится решение $x = \varphi_1(t)$ задачи Коши $x' = f(x, y_1)$, $x(t_1) = x_1$, по которому строятся векторы $x_2 = \varphi_1(t_2)$, $y_2 = g(x_2, y_1, u_1)$, где $u_1 = u(t_1)$ и т.д.

Следовательно, решением системы (1), стартующим из точки $z_0 = (x_0, y_0)$ при выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является функция

$$(4)\qquad z(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\varphi_0(t), y_0), \quad t_0 \leqslant t < t_1, \\ (\varphi_1(t), y_1), \quad t_1 \leqslant t < t_2, \\ (\varphi_2(t), y_2), \quad t_2 \leqslant t < t_3, \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Компоненты решения (4) имеют следующие особенности: $x(t)$ непрерывна при всех $t \geqslant 0$, непрерывно дифференцируема на интервале (t_k, t_{k+1}), но не обязательно дифференцируема в моменты времени $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $y(t)$ кусочно-постоянна и меняет свои значения в моменты времени $t = t_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Основной задачей в настоящей статье является установление достаточных условий стабилизации систем вида (1) и построение стабилизирующих управлений для таких систем. Решение поставленной задачи основано на переходе от нелинейной гибридной системы (1) к равносильной нелинейной дискретной динамической системе.

3. Переход к дискретной системе. Управляемость и стабилизируемость систем

Учитывая соотношения (3), функции $f(x,y)$, $g(x,y,u)$ можно представить в виде

$$f(x,y) = A_1 x + B_1 y + a(x,y), \quad g(x,y,u) = A_2 x + B_2 y + Cu + b(x,y,u),$$

где $A_1 = f'_x(0,\,0)$, $B_1 = f'_y(0,\,0)$, $A_2 = g'_x(0,\,0,\,0)$, $B_2 = g'_y(0,\,0,\,0)$, $C = g'_u(0,\,0,\,0)$ – матрицы соответствующих размеров, а гладкие нелинейности $a(x,y)$ и $b(x,y,u)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x,y) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \to 0,$$
$$b(x,y,u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| + \|u\| \to 0.$$

Будем полагать, что $x(t_k) = x_k$, $y(t_k) = y_k$, $u(t_k) = u_k$, тогда система (1) равносильна гибридной системе

$$\begin{cases} x'(t) = A_1 x(t) + B_1 y_k + a(x(t), y_k)\,, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y_{k+1} = A_2 x_{k+1} + B_2 y_k + Cu_k + b(x_{k+1}, y_k, u_k), \quad k = 0,1,2,\dots \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\det A_1 \neq 0$, тогда, применяя оператор сдвига по траекториям системы $x' = f(x,y)$ за время от $t = 0$ до $t = h > 0$ (см. [23]), можно выполнить переход от системы (5) к дискретной системе вида

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{A_1 h} x_k + A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 y_k + \varepsilon(x_k, y_k; h), \\ y_{k+1} = A_2 e^{A_1 h} x_k + (A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I) B_1 + B_2) y_k + Cu_k + \delta(x_k, y_k, u_k; h), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k + h)A_1} \int\limits_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(p(s, x_k, y_k), y_k) ds,$$

$x = p(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши

$$x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k), \quad x(t_k) = x_k\,;$$
$$\delta(x_k, y_k, u_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k). \tag{7}$$

Отметим, что случай вырожденной матрицы A_1 также может быть рассмотрен, но приводит к существенно более сложным формулам.

Дискретную систему (6) можно записать в компактном виде

$$z_{k+1} = A(h) z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h), \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{8}$$

здесь

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$A(h)$ – блочная матрица порядка $n+m$:

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

При $u = 0$ система (6) или, что то же самое, система (8) имеет нулевое положение равновесия.

Используя [23] и условие (7), можно доказать, что

$$\varepsilon(x, y; h) = o(\|x\| + \|y\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| \to 0,$$
$$\delta(x, y, u; h) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|x\| + \|y\| + \|u\| \to 0\,.$$

Тогда в системе (8) функция $\xi(z, u, h)$ удовлетворяет условию

$$\xi(z, u, h) = o(\|z\| + \|u\|) \quad \text{при} \quad \|z\| + \|u\| \to 0\,. \tag{10}$$

При выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, гибридная система (1) и дискретная система (6) равносильны в следующем смысле [8]:

– если $(x(t), y_k)$ – решение системы (1), то (x_k, y_k) – решение системы (6), где $x_k = x(t_k)$;

– если (x_k, y_k) – решение системы (6), то $(x(t), y_k)$ – решение системы (1), где $x(t)$ – решение задачи Коши $x' = f(x, y_k), x(t_k) = x_k$.

Следовательно, система (1) и система (8) также равносильны.

Основываясь на [24–26], введем следующие определения.

Определение 1. Гибридная система (1) *называется управляемой при* $h = h_0 > 0$, *если для любых векторов* $z^{(0)}$, $z^{(1)} \in R^{n+m}$ *существует управление* $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$ $(l \in N)$ *такое, что для решения* $z = z(t)$ *системы* (1) *с начальным условием* $z(t_0) = z^{(0)}$ *выполняется равенство* $z(t_l) = z^{(1)}$, *где* $t_l = t_0 + lh_0$.

Определение 2. Дискретная система (8) *называется управляемой при* $h = h_0 > 0$, *если для любых состояний* $z^{(0)}$, $z^{(1)} \in R^{n+m}$ *существует управление* u_k, $k = 0, 1, \ldots, l-1$ $(l \in N)$ *такое, что для решения* z_k, $k = 0, 1, \ldots, l$, *системы* (8) *с начальным условием* $z_0 = z^{(0)}$ *выполняется равенство* $z_l = z^{(1)}$, *где* $z_l = z(t_l) = z(t_0 + lh_0)$.

Положение равновесия систем (1) и (8) при некоторых $h > 0$ может быть неустойчивым.

Определение 3. Гибридная система (1) *называется стабилизируемой при* $h = h_0 > 0$, *если существует кусочно-постоянная функция* $u = \varphi(t) \in R^q$, $t_k \leqslant t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *такая что система* (1) *с управлением* $u = \varphi(t)$ *при* $h = h_0 > 0$ *имеет асимптотически устойчивое решение* $x = 0$, $y = 0$.

О п р е д е л е н и е 4. Дискретная система (8) *называется стабилизируемой при* $h = h_0 > 0$, *если существует управление* $u_k = \Phi(z_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *такое что при* $h = h_0 > 0$ *система* (8) *имеет асимптотически устойчивое решение* $z = 0$.

Сравнивая определения 1 и 2, приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а 1. Гибридная система (1) *управляема при* $h = h_0 > 0$ *в том и только том случае, если дискретная система* (8) *управляема при* $h = h_0 > 0$.
Доказательство данной теоремы и других основных утверждений вынесено в Приложение.

Системой первого приближения нелинейной дискретной системы (8) служит линейная дискретная система вида

$$z_{k+1} = A(h)z_k + Bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{11}$$

Перейдем к рассмотрению вопросов стабилизации системы (1), учитывая особенности управления в этой системе.

4. Стабилизация гибридной системы (1) со скалярным управлением

Пусть в системе (1) $u \in R^1$, тогда система первого приближения соответствующей дискретной системы (8) имеет вид

$$z_{k+1} = A(h)z_k + bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{12}$$

где $z \in R^{n+m}$, $A(h)$ – матрица вида (9), b – матрица размера $(n+m) \times 1$, $u \in R^1$.

Будем полагать, что при $h = h_0 > 0$ для системы (12) выполняется условие полной достижимости, т.е.

$$\operatorname{rank}\,[b, A(h_0)b, A^2(h_0)b, \dots, A^{n+m-1}(h_0)b] = n + m, \tag{13}$$

из которого следует управляемость системы (12) при $h = h_0 > 0$.

Заметим, что условие (13) можно ослабить, например, условием полной управляемости системы (12) при $h = h_0 > 0$ ([11], с. 268–269).

Имеет место

Т е о р е м а 2. Пусть линейная дискретная система (12) *удовлетворяет условию* (13), *тогда существует преобразование*

$$z_k^* = Sz_k, \quad u_k^* = \alpha z_k + u_k, \tag{14}$$

где $\det S \neq 0$, α – *матрица размера* $1 \times (n+m)$, *приводящее данную систему к виду*

$$\left\{\begin{aligned} z^*_{k+1,1} &= z^*_{k,2}, \\ z^*_{k+1,2} &= z^*_{k,3}, \\ &\vdots \\ z^*_{k+1,n+m-1} &= z^*_{k,n+m}, \\ z^*_{k+1,n+m} &= u^*_k, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

при этом $z^*_{k,i}$ – i-*я компонента вектора* z^*_k.

Систему (15) назовем *канонической формой Бруновского для системы* (12) *при* $h = h_0 > 0$. В таком случае справедлива

Теорема 3. Пусть система (12) *удовлетворяет условию* (13), *тогда она стабилизируема при* $h = h_0 > 0$.

Из доказательства теоремы 3 (см. ниже Приложение) и равенств (14) получим

Следствие 1. Управление $u_k = S^* z_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, *где* $S^* = pS - \alpha$, $u_k^* = p z_k^*$, *является стабилизирующим для линейной дискретной системы* (12), *при этом все собственные значения матрицы* $A(h_0) + bS^*$ *меньше 1 по модулю.*

Теорема 4. Если система первого приближения (12) *соответствующей нелинейной дискретной системы* (8) *удовлетворяет условию* (13), *тогда соответствующая гибридная система* (1) *стабилизируема при* $h = h_0 > 0$.

Пример 1. Построить стабилизирующее управление для гибридной системы

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y_{k,1} + a(x(t), y_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y_{k+1,1} = x(t_{k+1}) + y_{k,2} - u_k + b_1(x(t_{k+1}), y_k, u_k), \\ y_{k+1,2} = -x(t_{k+1}) + y_{k,1} + 0{,}5u_k + b_2(x(t_{k+1}), y_k, u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \tag{16}$$

где $x \in R^1$, $y \in R^2$, $u \in R^1$; $a(x, y)$, $b_1(x, y, u)$, $b_2(x, y, u)$ – гладкие нелинейности в соответствии с системой (5), приводя соответствующую дискретную систему первого приближения к канонической форме Бруновского.

Системой первого приближения для нелинейной дискретной системы, равносильной системе (16), служит дискретная система вида (12) с матрицами

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{-h} & 1 - e^{-h} & 0 \\ e^{-h} & 1 - e^{-h} & 1 \\ -e^{-h} & e^{-h} & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Можно доказать, что эта дискретная система управляема при всех $h:\ 0 < h \neq ln4$.

Пусть $h_0 = ln2$, тогда $A(h_0) = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$, заметим, что при $u = 0$ решение $x = 0$, $y = 0$ системы (16) является устойчивым (но не асимптотически устойчивым). Составим матрицу $F(h_0) = [b, A(h_0)b, A^2(h_0)b]$.

$$F(h_0) = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ -1 & 0 & -0{,}75 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}, \quad \text{тогда } F^{-1}(h_0) = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$f(h_0) = [-8 \ \ 4 \ \ 8], \quad S = \begin{bmatrix} f(h_0) \\ f(h_0)A(h_0) \\ f(h_0)A^2(h_0) \end{bmatrix}, \quad \text{т.е.} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ -6 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $z_k^* = Sz_k$, что соответствует системе

$$\begin{cases} z_{k,1}^* = -8x_k + 4y_{k,1} + 8y_{k,2}, \\ z_{k,2}^* = -6x_k + 2y_{k,1} + 4y_{k,2}, \\ z_{k,3}^* = -4x_k + 2y_{k,2}. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = -8x_{k+1} + 4y_{k+1,1} + 8y_{k+1,2} = -6x_k + 2y_{k,1} + 4y_{k,2} = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = -6x_{k+1} + 2y_{k+1,1} + 4y_{k+1,2} = -4x_k + 2y_{k,2} = z_{k,3}^*, \\ z_{k+1,3}^* = -4x_{k+1} + 2y_{k+1,2} = -3x_k - y_{k,1} + u_k = u_k^*. \end{cases}$$

Таким образом, каноническая форма Бруновского для дискретной системы первого приближения, соответствующей системе (16), при $h_0 = ln2$ имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ z_{k+1,3}^* = u_k^*, \end{cases}$$

где $u_k^* = -3x_k - y_{k,1} + u_k$. Можно убедиться, что $u_k^* = \alpha z_k + u_k$, где $\alpha = f(h_0)A^3(h_0)$.

Найдем стабилизирующее управление для системы (16).

Имеем $u_k = S^* z_k$, $S^* = pS - \alpha$, $u_k^* = pz_k^*$, где $p = [p_1 \;\; p_2 \;\; p_3]$, p_1, p_2 и p_3 – коэффициенты характеристического уравнения последней системы уравнений:

$$\lambda^3 - p_3\lambda^2 - p_2\lambda - p_1 = 0.$$

Поскольку коэффициенты характеристического уравнения выбираются произвольно, то подберем их так, чтобы корни λ_1, λ_2 и λ_3 этого уравнения лежали внутри единичной окружности.

Возьмем $\lambda_{1,2,3} = \frac{1}{2}$, тогда $\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{8} = 0$, и $p = [\frac{1}{8} \;\; -\frac{3}{4} \;\; \frac{3}{2}]$, $\alpha = [-3 \;\; -1 \;\; 0]$, отсюда $S^* = [\frac{1}{2} \;\; 0 \;\; 1]$, т.е. $u_k = \frac{1}{2}x_k + y_{k,2}$ – искомое управление.

Действительно, при $h_0 = ln2$ подстановка найденного управления в дискретную систему вида (12), соответствующую системе (16), позволит получить матрицу $A(h_0) + bS^*$, все собственные значения которой равны $\frac{1}{2}$, т.е. по модулю меньше 1. Тогда на основании доказательства теоремы 4 (см. ниже Приложение) делаем вывод о том, что система (16) стабилизируема при $h_0 = ln2$ управлением $u_k = \frac{1}{2}x_k + y_{k,2}$.

Рассмотрим важный частный случай системы (1), когда $n = m = q = 1$. Тогда система (1) содержит скалярные уравнения и равносильна гибридной системе вида

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} x'(t) = a_1x(t) + b_1y_k + a(x(t), y_k)\,, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y_{k+1} = a_2x_{k+1} + b_2y_k + cu_k + b(x_{k+1}, y_k, u_k)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $a_1 = f'_x(0,0)$, $b_1 = f'_y(0,0)$, $a_2 = g'_x(0,0,0)$, $b_2 = g'_y(0,0,0)$, $c = g'_u(0,0,0)$ – числа, а гладкие нелинейности $a(x,y)$ и $b(x,y,u)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x,y) = o(|x| + |y|) \quad \text{при} \ \ |x| + |y| \to 0,$$
$$b(x,y,u) = o(|x| + |y| + |u|) \quad \text{при} \ \ |x| + |y| + |u| \to 0\,.$$

Равносильная системе (17) нелинейная дискретная система имеет систему первого приближения вида (12), где

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{a_1 h} & \dfrac{b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) \\ a_2 e^{a_1 h} & \dfrac{a_2 b_1}{a_1}(e^{a_1 h} - 1) + b_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Тогда справедлива

Т е о р е м а 5. *Если гибридная система* (1) *содержит скалярные уравнения и в равносильной системе* (17) $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c \neq 0$, *тогда система* (1) *стабилизируема при любом* $h > 0$.

В таком случае стабилизирующее управление находится согласно алгоритму, продемонстрированному в Примере 1.

5. Стабилизация системы (1) с многомерным (векторным) управлением

Пусть в гибридной системе (1) $n \geqslant 1$, $m > 1$, $q > 1$, т.е. для равносильной дискретной системы (8) системой первого приближения служит дискретная система (11), и пусть система (11) при $h = h_0 > 0$ удовлетворяет условию полной достижимости, т.е.

$$\operatorname{rank}\,[B, A(h_0)B, A^2(h_0)B, \ldots, A^{n+m-1}(h_0)B] = n + m. \tag{19}$$

Т е о р е м а 6. *Если система* (11) *удовлетворяет условию* (19), *тогда существует преобразование*

$$z_k^* = S z_k, \quad u_{k,l}^* = \alpha_l z_k + u_{k,l}, \quad \det S \neq 0, \quad l = 1, \ldots, q, \tag{20}$$

приводящее систему (11) *к совокупности* q *независимых подсистем, каждая из которых имеет каноническую форму Бруновского.*

Из доказательства данной теоремы (см. Приложение) следует, что исходная система (11) распадается на q независимых подсистем вида (15), размерности которых равны $s_1, \ldots, s_q$, при этом $s_1 + s_2 + \ldots + s_q = n + m$. Тогда справедлива

Т е о р е м а 7. *Если линейная дискретная система* (11) *удовлетворяет условию* (19), *тогда она стабилизируема при* $h = h_0 > 0$.

Из доказательства теоремы 7 (см. ниже Приложение) и равенств (20) получим

Следствие 2. Стабилизирующее управление для дискретной системы (11) *имеет вид*

$$u_k = S^* z_k,$$

где $u_{k,l} = s_l^* z_k$, $s_l^* = pS_l - \alpha_l$, $u_{k,l}^* = p z_{kl}^*$, S_l *– часть матрицы* S, *соответствующая подсистеме* l $(l = 1, \ldots, q)$, p *– вектор размерности* s_l, z_{kl}^* *– вектор, содержащий* s_l *компонент вектора* z_k^*, *соответствующих подсистеме* l, s_l^* *– строки матрицы* S^*. *При этом все собственные значения матрицы* $A(h_0) + BS^*$ *меньше 1 по модулю.*

Имеет место следующая

Теорема 8. Если линейная дискретная система (11) *удовлетворяет условию* (19), *тогда соответствующая ей нелинейная гибридная система* (1) *стабилизируема при* $h = h_0 > 0$.

Пример 2. Построить стабилизирующее управление для гибридной системы

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) + 2y_{k,1} - 2y_{k,2} + a(x(t), y_k), \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ y_{k+1,1} = -x_{k+1} + u_{k,1} - u_{k,2} + b_1(x_{k+1}, y_k, u_k), \\ y_{k+1,2} = x_{k+1} - y_{k,1} + y_{k,2} + u_{k,1} + 2u_{k,2} + b_2(x_{k+1}, y_k, u_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где $x \in R^1$, $y \in R^2$, $u \in R^2$; $a(x, y)$, $b_1(x, y, u)$, $b_2(x, y, u)$ – гладкие нелинейности в соответствии с системой (5), приводя соответствующую дискретную систему первого приближения к совокупности независимых подсистем в канонической форме Бруновского (к канонической форме Бруновского).

Данной системе соответствует дискретная система вида (11) с матрицами

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{-2h} & 1 - e^{-2h} & e^{-2h} - 1 \\ -e^{-2h} & e^{-2h} - 1 & 1 - e^{-2h} \\ e^{-2h} & -e^{-2h} & e^{-2h} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим матрицу

$$[B, A(h)B, A^2(h)B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3(e^{-2h} - 1) & 0 & (e^{-2h} - 1)(9e^{-2h} - 3) \\ 1 & -1 & 0 & 3(1 - e^{-2h}) & 0 & (e^{-2h} - 1)(3 - 9e^{-2h}) \\ 1 & 2 & 0 & 3e^{-2h} & 0 & e^{-2h}(9e^{-2h} - 6) \end{bmatrix},$$

$\operatorname{rank}[B, A(h)B, A^2(h)B] = 3$ при любых $h > 0$, значит, соответствующая линейная дискретная система вида (11) управляема при любом $h > 0$.

Пусть $h_0 = ln3$ и пусть b_1, b_2 – столбцы матрицы B. Тогда

$$A_0 = A(h_0) = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -8/9 \\ -1/9 & -8/9 & 8/9 \\ 1/9 & -1/9 & 1/9 \end{bmatrix}.$$

Из последовательности столбцов $(b_1, b_2, A_0b_1, A_0b_2, A_0^2b_1, A_0^2b_2)$ составим матрицу F_0 третьего порядка ранга 3. Заметим, что матрица A_0b_1 является нулевым столбцом, поэтому столбцы A_0b_1, $A_0^2b_1$ исключаются из рассмотрения.

$A_0b_2 = [-8/3 \;\; 8/3 \;\; 1/3]^T$, поэтому $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, и $F_0 = [b_1, b_2, A_0b_2]$, т.е.

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8/3 \\ 1 & -1 & 8/3 \\ 1 & 2 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad F_0^{-1} = \begin{bmatrix} 17/24 & 2/3 & 1/3 \\ -7/24 & -1/3 & 1/3 \\ -3/8 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$k = 1, 2,$ так как $\operatorname{rank} B = 2$.

$k=1: \displaystyle\sum_{j=1}^{k} s_j = s_1 = 1,$ следовательно, f_1 – первая строка матрицы F_0^{-1}.

$k=2: \displaystyle\sum_{j=1}^{k} s_j = s_1 + s_2 = 3,$ следовательно, f_2 – третья строка матрицы F_0^{-1}.

$$S = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_2A_0 \end{bmatrix}, \text{ т.е. } S = \begin{bmatrix} 17/24 & 2/3 & 1/3 \\ -3/8 & 0 & 0 \\ -1/24 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

$$z_k^* = Sz_k, \text{ тогда } \begin{cases} z_{k,1}^* = \dfrac{17}{24}x_k + \dfrac{2}{3}y_{k,1} + \dfrac{1}{3}y_{k,2}, \\ z_{k,2}^* = -\dfrac{3}{8}x_k, \\ z_{k,3}^* = -\dfrac{1}{24}x_k - \dfrac{1}{3}y_{k,1} + \dfrac{1}{3}y_{k,2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$z_{k+1,1}^* = u_{k,1}^*,$ где $u_{k,1}^* = f_1A_0^{s_1}z_k + u_{k,1} = f_1A_0z_k + u_{k,1} = \dfrac{1}{24}x_k + u_{k,1};$

$z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*;\; z_{k+1,3}^* = u_{k,2}^*,$

$$\text{где } u_{k,2}^* = f_2A_0^{s_2}z_k + u_{k,2} = \frac{5}{72}x_k + \frac{2}{9}y_{k,1} - \frac{2}{9}y_{k,2} + u_{k,2}.$$

Итак, каноническая форма Бруновского (совокупность таких форм) для линейной дискретной системы, соответствующей исходной системе, при $h_0 = ln3$ имеет вид

$$\begin{cases} z_{k+1,1}^* = u_{k,1}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ z_{k+1,3}^* = u_{k,2}^*. \end{cases}$$

Найдем стабилизирующее управление для соответствующей линейной дискретной системы при $h_0 = ln3$.

1) $u_{k,1}^* = pz_{k1}^*,$ где $p = p_1,$ $z_{k1}^* = z_{k,1}^*,$ так как $s_1 = 1,$ $z_{k+1,1}^* = pz_{k,1}^*,$ тогда $\lambda = p$. Пусть $\lambda = \frac{1}{3}$, то $p = \frac{1}{3}$, $\alpha_1 = f_1A_0 = [\frac{1}{24} \;\; 0 \;\; 0]$, $S_1 = f_1$, значит, $s_1^* = pS_1 - \alpha_1 = [\frac{7}{36} \;\; \frac{2}{9} \;\; \frac{1}{9}]$, $u_{k,1} = s_1^*z_k$, т.е. $u_{k,1} = \frac{7}{36}x_k + \frac{2}{9}y_{k,1} + \frac{1}{9}y_{k,2};$
2) $u_{k,2}^* = pz_{k2}^*,$ где $p = [p_1 \;\; p_2]$, $z_{k2}^* = [z_{k,2}^* \;\; z_{k,3}^*]^T$, так как $s_2 = 2$, $z_{k+1,3}^* = p_1z_{k,2}^* + p_2z_{k,3}^*$, тогда $\lambda^2 - p_2\lambda - p_1 = 0$.

Пусть $\lambda_{1,2} = \frac{1}{3}$, тогда $\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{9} = 0$, и $p = [-\frac{1}{9} \ \ \frac{2}{3}]$;

$$\alpha_2 = f_2 A_0^2 = [5/72 \ \ 2/9 \ \ -2/9], \quad S_2 = \begin{bmatrix} -3/8 & 0 & 0 \\ -1/24 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$s_2^* = pS_2 - \alpha_2 = [-1/18 \ \ -4/9 \ \ 4/9], \text{ т.е. } u_{k,2} = -\frac{1}{18}x_k - \frac{4}{9}y_{k,1} + \frac{4}{9}y_{k,2}.$$

Таким образом, стабилизирующее управление имеет вид

$$u_k = \begin{bmatrix} \dfrac{7}{36}x_k + \dfrac{2}{9}y_{k,1} + \dfrac{1}{9}y_{k,2} \\ -\dfrac{1}{18}x_k - \dfrac{4}{9}y_{k,1} + \dfrac{4}{9}y_{k,2} \end{bmatrix}.$$

Данное управление является стабилизирующим и для исходной нелинейной гибридной системы, поскольку

$$S^* = \begin{bmatrix} 7/36 & 2/9 & 1/9 \\ -1/18 & -4/9 & 4/9 \end{bmatrix}, \quad A_0 + BS^* = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -8/9 \\ 5/36 & -2/9 & 5/9 \\ 7/36 & -7/9 & 10/9 \end{bmatrix},$$

и матрица $A_0 + BS^*$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2,3} = \frac{1}{3}$, т.е. $|\lambda_{1,2,3}| < 1$.

6. Заключение

В работе установлено общее достаточное условие стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных систем вида (1) как с одномерным, так и с многомерным управлением, которое предполагает выполнение условия полной достижимости для систем первого приближения соответствующих равносильных нелинейных дискретных динамических систем.

Изложен общий подход к стабилизации нелинейных гибридных систем (1) с различным по размерности управлением, представлено построение стабилизирующих управлений для таких систем. Предложенный подход позволит обеспечить устойчивые режимы функционирования реальных технических, механических и других систем управления с неоднородной структурой, а также решить вопросы построения допустимого и оптимального управлений данными системами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из равносильности систем (1) и (8), которая учитывает связь решений данных систем, а также определений управляемых систем следует справедливость данного утверждения.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку линейная дискретная система (12) удовлетворяет условию (13), то матрица

$$F(h_0) = \left[b, \, A(h_0)b, \, A^2(h_0)b, \, \ldots, \, A^{n+m-1}(h_0)b\right]$$

обратима, т.е. существует обратная матрица $F^{-1}(h_0)$.

Пусть $f(h_0) \in R^{n+m}$ – вектор, составленный из элементов последней строки матрицы $F^{-1}(h_0)$ [27]. Тогда с учетом определения обратной матрицы получим:

$$f(h_0)b = f(h_0)A(h_0)b = \ldots = f(h_0)A^{n+m-2}(h_0)b = 0, \tag{П.1}$$

$$f(h_0)A^{n+m-1}(h_0)b = 1. \tag{П.2}$$

Пусть

$$\begin{cases} z^*_{k,1} = f(h_0)z_k, \\ z^*_{k,2} = f(h_0)A(h_0)z_k, \\ z^*_{k,3} = f(h_0)A^2(h_0)z_k, \\ \vdots \\ z^*_{k,n+m} = f(h_0)A^{n+m-1}(h_0)z_k, \end{cases} \tag{П.3}$$

тогда $z^*_k = Sz_k$, где $S = \begin{bmatrix} f(h_0) \\ f(h_0)A(h_0) \\ f(h_0)A^2(h_0) \\ \vdots \\ f(h_0)A^{n+m-1}(h_0) \end{bmatrix}$, причем $\det S \neq 0$, поскольку дискретная система (12) удовлетворяет условию (13).

При $h = h_0 > 0$ система (12) примет вид

$$z_{k+1} = A(h_0)z_k + bu_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

тогда из равенств (П.3) с учетом (П.1) и (П.2) получим:

$$\begin{cases} z^*_{k+1,1} = f(h_0)z_{k+1} = z^*_{k,2}, \\ z^*_{k+1,2} = f(h_0)A(h_0)z_{k+1} = z^*_{k,3}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,n+m-1} = f(h_0)A^{n+m-2}(h_0)z_{k+1} = z^*_{k,n+m}, \\ z^*_{k+1,n+m} = f(h_0)A^{n+m-1}(h_0)z_{k+1} = \alpha z_k + u_k, \end{cases} \tag{П.4}$$

где $\alpha = f(h_0)A^{n+m}(h_0)$.

Следовательно, система (П.4) имеет вид (15), где $u^*_k = \alpha z_k + u_k$, и эквивалентна дискретной системе (12) при $h = h_0 > 0$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Дискретная система (12) удовлетворяет условию (13), тогда согласно теореме 2 она представима в виде (15).

Пусть $u_k^* = pz_k^*$, где $p = [p_1 \;\; p_2 \;\; \ldots \;\; p_{n+m}]$, тогда система (15) примет вид

$$(\text{П}.5) \qquad \begin{cases} z_{k+1,1}^* = z_{k,2}^*, \\ z_{k+1,2}^* = z_{k,3}^*, \\ \vdots \\ z_{k+1,n+m-1}^* = z_{k,n+m}^*, \\ z_{k+1,n+m}^* = p_1 z_{k,1}^* + p_2 z_{k,2}^* + \ldots + p_{n+m} z_{k,n+m}^*. \end{cases}$$

И пусть $z_{k,1}^* = \lambda^0 = 1$, $z_{k,2}^* = z_{k+1,1}^* = \lambda$, $z_{k,3}^* = z_{k+1,2}^* = z_{k+2,1}^* = \lambda^2, \ldots, z_{k,n+m}^* = = \lambda^{n+m-1}$, $z_{k+1,n+m}^* = \lambda^{n+m}$. Тогда система (П.5) сводится к уравнению

$$(\text{П}.6) \qquad \lambda^{n+m} - p_{n+m}\lambda^{n+m-1} - p_{n+m-1}\lambda^{n+m-2} - \ldots - p_2\lambda - p_1 = 0.$$

Уравнение (П.6) является характеристическим для матрицы системы (П.5). Поскольку коэффициенты уравнения (П.6) выбираются произвольно, то подберем их так, чтобы выполнялось условие $|\lambda_i| < 1$ при $i = 1, \ldots, n+m$. Тогда система (15) с управлением $u_k^* = pz_k^*$ имеет асимптотически устойчивое решение $z_k^* = 0$. Отсюда следует, что дискретная система (12), представленная в форме (15), стабилизируема при $h = h_0 > 0$, и теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Учитывая следствие 1, соотношение (10) и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевой точки равновесия нелинейной непрерывно-дискретной системы (1), полученное в [23], установим справедливость данного утверждения, и теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Можно установить, что если в нелинейной гибридной системе (17) $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $c \neq 0$, то соответствующая ей дискретная система (12) с матрицами (18) удовлетворяет условию (13), тогда, учитывая теорему 4, получим заключение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6. Без ограничения общности будем считать, что $\operatorname{rank} B = q$, $q > 1$. Пусть $b_1, \ldots, b_q$ – столбцы матрицы B, $A_0 = A(h_0)$ и дискретная система (11) удовлетворяет условию (19).

Из последовательности столбцов (см. [27])
$(b_1, b_2, \ldots, b_q, A_0b_1, A_0b_2, \ldots, A_0b_q, A_0^2b_1, A_0^2b_2, \ldots, A_0^2b_q, \ldots, A_0^{n+m-1}b_1, \ldots, A_0^{n+m-1}b_q)$
составим матрицу $F_0 = F(h_0)$ порядка $n + m$, ранг которой равен $n + m$, причем

$$(\text{П}.7) \qquad \begin{aligned} F_0 = [&b_1, A_0b_1, A_0^2b_1, \ldots, A_0^{s_1-1}b_1, b_2, A_0b_2, A_0^2b_2, \ldots, \\ &A_0^{s_2-1}b_2, \ldots, b_q, A_0b_q, A_0^2b_q, \ldots, A_0^{s_q-1}b_q]. \end{aligned}$$

При построении матрицы (П.7) важно, чтобы для каждого столбца b_k эта матрица включала все столбцы $b_k, A_0b_k, A_0^2b_k, \ldots, A_0^{s_k-1}b_k$, где $s_k = 1, \ldots$ $\ldots, n+m$, $k = 1, \ldots, q$, при этом каждый столбец $A_0^jb_k$, $(j = 0, 1, \ldots, n+m-1)$ включается в матрицу при условии: если со всеми столбцами, стоящими до него в этой матрице, он образует линейно независимую систему. В противном случае столбцы $A_0^j b_k$, $A_0^{j+1} b_k, \ldots, A_0^{n+m-1} b_k$ исключаются из рассмотрения.

Поскольку $\operatorname{rank} F_0 = n+m$, то существует обратная матрица F_0^{-1}. Пусть f_k $(k = 1, \ldots, q)$ – обозначение строки матрицы F_0^{-1} с номером, определяемым числом $\sum\limits_{j=1}^{k} s_j$, тогда, учитывая определение обратной матрицы, получим условия:

$$f_k A_0^{j-1} b_i = 0, \quad (k \neq i) \vee (j \neq s_k), \tag{П.8}$$

$$f_k A_0^{s_k-1} b_k = 1. \tag{П.9}$$

Пусть

$$\begin{cases} z^*_{k,1} = f_1 z_k, \\ z^*_{k,2} = f_1 A_0 z_k, \\ \vdots \\ z^*_{k,s_1} = f_1 A_0^{s_1-1} z_k, \\ z^*_{k,s_1+1} = f_2 z_k, \\ z^*_{k,s_1+2} = f_2 A_0 z_k, \\ \vdots \\ z^*_{k,s_1+s_2} = f_2 A_0^{s_2-1} z_k, \\ \vdots \\ z^*_{k,s_1+s_2+\ldots+s_q} = f_q A_0^{s_q-1} z_k, \end{cases} \tag{П.10}$$

где $s_1 + s_2 + \ldots + s_q = n + m$. Тогда $z^*_k = S z_k$, причем $S = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_1 A_0 \\ \vdots \\ f_1 A_0^{s_1-1} \\ f_2 \\ f_2 A_0 \\ \vdots \\ f_2 A_0^{s_2-1} \\ \vdots \\ f_q \\ \vdots \\ f_q A_0^{s_q-1} \end{bmatrix}$,

S – матрица порядка $n + m$, $\det S \neq 0$, так как дискретная система (11) удовлетворяет условию (19).

Тогда $z^*_{k+1} = Sz_{k+1}$; при $h = h_0 > 0$ дискретная система (11) примет вид

$$z_{k+1} = A_0 z_k + Bu_k,$$

и, учитывая (П.8)–(П.10), получим

$$\begin{cases} z^*_{k+1,1} = f_1 A_0 z_k + f_1 B u_k = f_1 A_0 z_k = z^*_{k,2}, \\ z^*_{k+1,2} = f_1 A_0^2 z_k + f_1 A_0 B u_k = f_1 A_0^2 z_k = z^*_{k,3}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,s_1} = f_1 A_0^{s_1} z_k + f_1 A_0^{s_1-1} B u_k = f_1 A_0^{s_1} z_k + u_{k,1} = u^*_{k,1}, \\ z^*_{k+1,s_1+1} = f_2 A_0 z_k + f_2 B u_k = z^*_{k,s_1+2}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,s_1+s_2} = f_2 A_0^{s_2} z_k + f_2 A_0^{s_2-1} B u_k = f_2 A_0^{s_2} z_k + u_{k,2} = u^*_{k,2}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,s_1+s_2+\ldots+s_q} = f_q A_0^{s_q} z_k + f_q A_0^{s_q-1} B u_k = f_q A_0^{s_q} z_k + u_{k,q} = u^*_{k,q}\,. \end{cases}$$

Таким образом, при $h = h_0 > 0$ дискретная система (11) с помощью преобразования (20) приведена к совокупности q независимых подсистем, представленных в форме Бруновского:

$$\text{(П.11)} \qquad \begin{cases} z^*_{k+1,1} = z^*_{k,2}, \\ z^*_{k+1,2} = z^*_{k,3}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,s_1} = u^*_{k,1}, \\ z^*_{k+1,s_1+1} = z^*_{k,s_1+2}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,s_1+s_2} = u^*_{k,2}, \\ \vdots \\ z^*_{k+1,s_1+s_2+\ldots+s_q-1} = z^*_{k,s_1+s_2+\ldots+s_q}, \\ z^*_{k+1,n+m} = u^*_{k,q}\,. \end{cases}$$

Размерности данных подсистем (число уравнений в них) равны соответственно $s_1, s_2, \ldots, s_q$. При этом $u^*_{k,l} = \alpha_l z_k + u_{k,l}$ $(l = 1, \ldots, q)$ – компоненты вектора управления, причем $\alpha_l = f_l A_0^{s_l}$. Дискретная система (11) эквивалентна системе (П.11) при $h = h_0 > 0$.

Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Из доказательства теоремы 3 следует, что каждая из q подсистем в (П.11) при определенным образом построенных управлениях имеет асимптотически устойчивое решение $z^* = 0$. В таком случае система (П.11) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение. Следовательно, эквивалентная ей система (11) стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Теорема 7 доказана.

Доказательство теоремы 8. Из теоремы 7 следует, что дискретная система (11) стабилизируема при $h = h_0 > 0$ и согласно следствию 2 все собственные значения матрицы $A_0 + BS^*$ меньше 1 по модулю. Тогда, учитывая (10) и достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной непрерывно-дискретной системы, полученное в работе [23], придем к требуемому выводу.

Теорема 8 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Астахова Т.Н., Зуев А.Л.* Стабилизация нелинейных систем в классе функций управления с дискретными переключениями // Уч. записки Таврич. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. 2011. Т. 24(63). № 3. С. 1–9.
2. *Логунова О.С., Агапитов Е.Б., Баранкова И.И. и др.* Математические модели для исследования теплового состояния тел и управления тепловыми процессами // Электротехнические системы и комплексы. 2019. № 2 (43). С. 25–34.
3. *Марченко В.М., Борковская И.М.* Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ. Физико-математические науки и информатика. 2012. № 6. С. 7–10.
4. *Шумафов М.М.* Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вест. СПб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 2019. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 564–591.
5. *Гурман В.И., Кань Ни Минь.* Вырожденные задачи оптимального управления. I // АиТ. 2011. № 3. С. 36–50.

   Gurman V.I., Kang Ni Ming. Degenerate Problems of Optimal Control. I // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 497–511.
6. *Моисеев А.А.* Оптимальное управление при дискретных управляющих воздействиях // АиТ. 1991. № 9. С. 123–132.

   Moiseev A. Optimal Control Under Discrete Control Actions // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 9. P. 1274–1280.
7. *Марченко В.М., Борковская И.М.* О стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. 2020. Серия 3. № 1. С. 5–13.
8. *Aktanova S.V., Kopylova N.A.* The Stability of Continuous-Discrete Dynamical Systems under Fast Switching // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. No. 5. P. 1826–1832.
9. *Седова Н.О.* Достаточные условия устойчивости и построение стабилизирующих управлений для дифференциальных систем специального вида с запаздыванием // Сиб. журн. индустр. матем. 2010. Т. 13. № 4. С. 118–130.
10. *Леонов Г.А.* Стабилизационная проблема Брокетта // АиТ. 2001. № 5. С. 190–193.
11. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Проблемы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002.

12. *Кривдина Л.Н.* Стабилизация дискретных объектов по выходу на основе линейных матричных неравенств // Детерминированные системы. 2006. № 2 (12). С. 102–110.

13. *Зубер И.Е.* Стабилизация дискретных систем динамическим регулятором // Вест. СПбГУ. 2012. Серия 1. Вып.1. С. 27–30.

14. *La Salle J.P.* The Stability and Control of Discrete Processes. N.Y.: Springer-Verlag. Inc., 1986.

15. *Nešić D., Teel A.R., Kokotović P.V.* Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations // Syst. Control. Lett. 1999. V. 38. No. 4–5. P. 259–270.

16. *Nešić D., Teel A.R.* Stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model // Automatica. 2006. V. 42. No. 10. P. 1801–1808.

17. *Марченко В.М., Борковская И.М.* К вопросу о стабилизации гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. 2020. Серия 3. № 2. С. 5–11.

18. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.

19. *Qian C., Du H.* Global Output Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Systems via Linear Sampled-Data Control // IEEE Transact. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 11. P. 2934–2939.

20. *Karafyllis L., Krstic M.* Nonlinear Stabilization Under Sampled and Delayed Measurements, and With Inputs Subject to Delay and Zero-Order Hold // IEEE Transact. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 5. P. 1141–1154.

21. *Сейфуллаев Р.Э., Фрадков А.Л.* Анализ дискретно-непрерывных нелинейных многосвязных систем на основе линейных матричных неравенств // АиТ. 2015. № 6. С. 57–74.

22. *Seifullaev R.E., Fradkov A.L.* Event-Triggered Control of Sampled-Data Nonlinear Systems // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 14. P. 12–17.

23. *Юмагулов М.Г., Акманова С.В.* Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уфим. мат. журн. 2023. Т. 15. № 2. С. 85–100.

24. *Ахундов А.А.* Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы. 1975. № 14. С. 4–10.

25. *Гайшун И.В.* Системы с дискретным временем. Минск: Ин-т мат. АН Белоруссии, 2001.

26. *Сазанова Л.А.* Об управлении дискретными системами // Дис. …канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ, 2002.

27. *Анохин Н.В.* Управление нелинейными механическими системами с дефицитом управляющих воздействий в окрестности положения равновесия // Дис. …канд. физ.-мат. наук. М.: ИПМех. РАН, 2014.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 21.05.2024

После доработки 05.07.2024

Принята к публикации 10.07.2024